- تعريف:

القاعدة الجزئية للطبولوجيا:

ليكن (X,τ) فضاء طبولوجي و S أسرة من المجموعات المفتوحة أي $(S \subseteq \tau)$
تسمى الأسرة S قاعدة جزئية إذا كانت أسرة التقاطعات المنتهية لعناصر من S
تشكل قاعدة للطبولوجيا τ.

- حدية مجموعة هي مجموعة مغلقة.

لأن:
$$Fr(A) = \bar{A} \cap \overline{X \setminus A}$$
يشكل عبارة عن تقاطع مجموعتين مغلقتين أي مجموعة مغلقة.

- (X,τ) الفضاء الطبولوجي المتقطع (τ متقطع).

$X = \{a,b,c\}$ ، A مجموعة جزئية من X أي $A \neq \phi$ ، $A \neq X$

أوجد: A° ، $\bar{A}$ ، A' ، $Fr(A)$ ، $Ext(A)$.

$\tau = \{\phi, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\}, X\}$ جميع المجموعات مفتوحة.

$\{X, \{b,c\}, \{a,c\}, \{a,b\}, \{c\}, \{b\}, \{a\}, \phi\}$ جميع المجموعات المغلقة (المتممات).

$$A' = \{x\} \cap A \setminus \{x\} = \phi$$
$$Fr(A) = \phi$$
$$Ext(A) = (X \setminus A)^{\circ} = X \setminus A$$

- كلما كانت الطبولوجيا أقوى كلما قلت المجموعات الكثيفة.

مبرهنة: ليكن $f: X \to Y$ تطبيق و x_0 نقطة من X و A مجموعة جزئية من X
وإذا كان التطبيق f مستمر في النقطة x_0 وإذا كانت x_0 نقطة لاصقة في
المجموعة A فإن النقطة $f(x_0)$ تكون نقطة لاصقة بالمجموعة $f(A)$ أي:
$$x_0 \in \bar{A} \Rightarrow f(x_0) \in \overline{f(A)}$$

- بفرض أن f مستمر و x_0 نقطة لاصقة بـ A ليكن V جوار كيفي للنقطة $f(x_0)$
في لا من أن f مستمر في x_0 من الفرض و أن $f^{-1}(V)$ جوار لـ x_0 في X
وبما أن x_0 لاصقة بـ A فإن أي جوار لها يتقاطع مع A ومن هذه العبارات
$f^{-1}(V)$ فإن: $f^{-1}(V) \cap A \neq \phi$ وإذاً يوجد $x \in f^{-1}(V) \cap A \neq \phi$
ومن هنا نجد أن
$$f(x) \in f(f^{-1}(V) \cap A) \subseteq f(f^{-1}(V)) \cap f(A) \subseteq V \cap f(A)$$
وبالتالي:
$$V \cap f(A) \neq \phi$$
وهذا يعني أن $f(x_0)$ نقطة لاصقة لـ $f(A)$ وهو المطلوب.



- الهوميومورفيزم (التشاكل المستمر):

ليكن $f: X \to Y$ نطلق على التطبيق f انه تشاكل مستمر (هوميومورفيزم) إذا كان تقابل مستمر ومعكوسه أي إذا حقق الشروط التالية:

1. f تقابل (متباين وغامر).
2. f مستمر.
3. f^{-1} مستمر.

- يكون التطبيق $f: X \to Y$ من الفضاء الطبولوجي X إلى الفضاء الطبولوجي Y مستمراً ومغلقاً إذا وفقط إذا تحققت العلاقة $f(\bar{A}) = \overline{f(A)}$ من أجل أي مجموعة A من X.

1. f مستمر ومغلق معاً ⟸
2. $f(\bar{A}) = \overline{f(A)}$ مهما تكن A من X.

حسب المبرهنة ان f مغلق ⟸ $\overline{f(A)} \subseteq f(\bar{A})$

وعلمنا f مستمر حسب مبرهنة سابقة ⟸ $f(\bar{A}) \subseteq \overline{f(A)}$

وبما أنه مستمر ومغلق تتحقق علاقتا الاحتواء معاً ومنهما تنتج المساواة.

- الطبولوجيا النسبية على A (أو الطبولوجيا τ على A):

(X, τ) فضاء طبولوجي، $A \subseteq X$ مجموعة جزئية من X

- مبرهنات:

1. (X, τ) فضاء طبولوجي و $A \subseteq X$

تكون A مفتوحة إذا وفقط إذا كانت جواراً لكل نقطة من نقاطها.

⟸ لزوم الشرط: نفرض $x \in A ; A \in T$ ⟸ $x \in A \subseteq A$

⟸ كفاية الشرط: $\forall x \in A, \exists U_x \in T ; U_x \subseteq A$

$\Rightarrow A = \bigcup_{x \in A} \{x\} \subseteq \bigcup U_x \subseteq A \Rightarrow A = \bigcup U_x$

⟸ المجموعة A هي اجتماع لمجموعات مفتوحة.

2 - $(X,\mathcal{T})$ فضاء توبولوجي و $B \subseteq \mathcal{T}$ أسرة من المجموعات المفتوحة.
تكون B قاعدة للطوبولوجيا $\mathcal{T}$ إذا وفقط إذا كانت الأسرة $\mathcal{V} = \{V \in B : x \in V\}$
تشكل جملة أساسية لجوارات النقطة x / $x \in T$.

← لزوم الشرط: B قاعدة و $x \in X$

وليكن G جوار كيفي لـ x عندئذ توجد مجموعة مفتوحة U حيث، $x \in U \subseteq G$
ومنه فإن U تساوي اجتماع لعناصر من B أي أن x سوف تقع بإحدى مجموعات هذا
الاجتماع ولتكن V_0 أي، $x \in V_0 \subseteq U \subseteq G$
ولكن $V_0 \in \mathcal{V}$ أي أن أي جوار كيفي يحوي إحدى عناصر من الأسرة $\mathcal{V}$ ← $\mathcal{V}$
جملة أساسية لجوارات x.

→ كفاية الشرط: بفرض أن $\mathcal{V}$ جملة أساسية. لنأخذ مجموعة كيفية (مفتوحة) $U \subseteq T$ و $x \in U$
عندئذ المجموعة U هي جوار لكل نقاطها، فهي جوار لـ x، وبما أن $\mathcal{V}$ قاعدة
أساسية فإنه يوجد $V_x \in \mathcal{V}$ حيث $x \in V_x \subseteq U$
وبما أن x كيفية فإن:

$$U = \bigcup_{x \in U} \{x\} \subseteq \bigcup V_x \subseteq U$$

ومنه $U = \bigcup V_x$ ولكن $\mathcal{V} \subseteq B$ وبالتالي U تساوي اجتماع لعناصر من B

هام 3 - المجموعة A كثيفة ⟺ A تتقاطع مع جميع المجموعات المفتوحة الغير خالية في هذا الفضاء.

← لزوم الشرط: U مجموعة مفتوحة و $x \in U$ فإن x تكون نقطة لاصقة.

← U تكون جوار للنقطة x وبما أن x نقطة ملتصقة فإن $A \cap U \neq \phi$

→ كفاية الشرط: لتكن x نقطة كيفية من الفضاء، و V جوار كيفي لها ومنه توجد
مجموعة مفتوحة U حيث $x \in U \subseteq V$ وحسب الفرض فإن: $U \cap A = \phi$
أي أن: $V \cap A \neq \phi$ أي أن x نقطة لاصقة وبالتالي لأن x كيفية
فإن جميع نقاط الفضاء لاصقة بـ A كثيفة.

هام 5 - ليكن $f : X \to Y$ تطبيق و $A \subseteq X$ و x_0 نقطة في X، إذا كان f مستمر في x_0
وكانت x_0 لاصقة بـ A فإن النقطة $f(x_0)$ تكون لاصقة بالمجموعة $f(A)$ أي:

$$x_0 \in \bar{A} \Rightarrow f(x_0) \in \overline{f(A)}$$

ليكن V جوار للنقطة $f(x_0)$ في U وبما أن f مستمر في x_0 إذاً $f^{-1}(V)$ جوار للنقطة $f(x_0)$
وبما أن x_0 نقطة لاصقة فإن أي جوار لها يتقاطع معها أي: $f^{-1}(V) \cap A \neq \phi$
ومنه في التقاطع يوجد نقطة ولتكن x ومنه:

$$f(x) = f(f^{-1}(V) \cap A) \subseteq f(f^{-1}(V)) \cap f(A) = V \cap f(A)$$

أي أن $f(x_0)$ نقطة لاصقة في $f(A)$

4- ليكن $f(\bar{A}) \subseteq \overline{f(A)}$ من أجل أي مجموعة $A \subseteq X$ إن الصورة العكسية وفق f لأي مجموعة مغلقة في Y هي مجموعة مغلقة في X.

- لتكن V مجموعة مغلقة في Y ولنفرض أن $f^{-1}(V) = U$

عندئذٍ $f(\bar{A}) \subseteq \overline{f(A)}$

$$\Rightarrow f(\bar{U}) \subseteq \overline{f(U)} = \overline{f(f^{-1}(V))} \subseteq \bar{V} = V$$

$$\Rightarrow \bar{U} \subseteq f^{-1}(V) = U \Rightarrow \bar{U} \subseteq U$$

∴ U مجموعة مغلقة

7- إذا كانت الصورة العكسية لأي مجموعة مغلقة في Y هي مجموعة مغلقة في X فإن الصورة العكسية لأي مجموعة مفتوحة في Y هي مجموعة مفتوحة في X

5- إذا كان $f: X \to Y$ (X طبولوجي، Y تقابل) فإن f مستمر ومغلق إذا تحقق $f(\bar{A}) = \overline{f(A)}$

هناك مبرهنة تقول أنه يكون التطبيق f مستمر إذا وفقط إذا كان $f(\bar{A}) \subseteq \overline{f(A)}$ ويكون مغلقاً إذا وفقط إذا كان $\overline{f(A)} \subseteq f(\bar{A})$ وبالتالي يكون مستمراً ومغلقاً إذا تحققت المساواة.

6- إذا كان $f: X \to Y$ (X متراص، Y هاوسدورف) مستمراً فإن f مغلق.

لتكن A مجموعة مغلقة في X وحيث أن X متراص فإن A متراصة، وبما أن f مستمر فإن $f(A)$ متراصة وبما أن Y فضاء هاوسدورف نعرف أن $f(A)$ مغلقة ∴ f مغلق لأنه ينقل المجموعة المغلقة إلى مجموعة مغلقة.

7- فضاء المتممات المنتهية هو T_1 فضاء ولكنه ليس T_2 فضاء؟!

- من أجل أي نقطتين مختلفتين x, y نجد أن $X \setminus \{x\}$ جوار للنقطة y لا يحوي x و $X \setminus \{y\}$ جوار لـ x لا يحوي y وذلك أن فضاء المتممات المنتهية هو T_1 فضاء.

- إن أي مجموعتين مفتوحتين غير خاليتين لابد أن تتقاطعا وبالتالي فإن أي جوارين لأي نقطتين مختلفتين يتقاطعان ومنه ليس T_2 فضاء

8- كل تطبيق مستمر منطلقه الفضاء المتقطع (X, T) هو تطبيق مستمر

لأن الصورة العكسية وفق f لأي مجموعة مفتوحة في المستقر تكون مفتوحة في المنطلق

- لتكن X مجموعة غير منتهية و T طبولوجيا متقطعة على X. هل هو متراص؟

كلا، لأن أسرة المجموعات الأحادية العنصر $\{\{x\}\}_{x\in X}$ تشكل تغطية مفتوحة لا تحوي تغطية جزئية منتهية.

هل هو مترابط؟

كلا، لأن أي مجموعة جزئية فعلية منه تكون مغلقة ومفتوحة في آن واحد.

هل هو معدود أول؟

نعم، لأن $\{\{x\}\}_{x\in X}$ تشكل جملة جوارات أساسية منتهية (قابلة للعد) لأي نقطة من نقاطه.

هل له قاعدة؟

نعم، وهي نفسها $\{\{x\}\}_{x\in X}$.

الخلاصة: $A \neq \phi$ ، $A \neq X$

$A^\circ = A$ ، $\bar{A} = A$ ، $A' = \phi$

- لتكن $X = \{a, b, c, d\}$ و T طبولوجيا على X مؤلفة من المجموعات التي تحوي العنصر a بالإضافة إلى المجموعة الخالية. $T = \{U \subseteq X : a \in U\} \cup \{\phi\}$

١- هل الفضاء (X, T) متراص؟

نعم، لأن عدد مجموعاته المفتوحة منتهي.

٢- هل هو مترابط؟

نعم، لأن أي مجموعتين مفتوحتين غير خاليتين سوف تتقاطعان على الأقل بالعنصر a

٣- هل هو T_1 ـ فضاء؟

كلا، لأنه مستحيل أي نقطتين a, b مثلاً لا نجد جواراً لـ b لا يحوي a.

٤- هل هو فضاء هاوسدورف؟

كلا، لأنه مترابط.

٥- عين جوارات النقطة b؟

$\{a, b\}, \{a, b, c\}, \{a, b, d\}, \{a, b, c, d\}$ أي كل مجموعة مفتوحة تحوي (a, b)

- بفرض $A = \{a, b, c\}$ أوجد ... الخاصية؟

$A^\circ = A$ ، $\bar{A} = X$ ، $A' = \{b, c, d\}$

$Fr(A) = \bar{A} \setminus A^\circ = \{d\}$ ، $Ext(A) = X \setminus \bar{A} = \phi$

- نفرض أن $A = \{b, c, d\}$ أوجد الخاصية وبعض الطوبولوجيا النسبية

$A^{\circ} = \phi \;,\quad \bar{A} = A \;,\quad A' = \phi$

$Ext(A) = \{a\} \;,\quad Fr(A) = A$

الطوبولوجيا القرينة τ_A: $\tau_A = \{u \cap A : u \in \tau\}$

9 - $Fr(A)$ مجموعة مغلقة .

لأنها تقاطع مجموعتين مغلقتين $Fr(A) = \bar{A} \cap \overline{X \setminus A}$

12 - (X, τ) فضاء ط و A فضاء جزئي حيث A مجموعة مفتوحة في X ولتكن $B \subseteq A$ عندئذٍ تكون المجموعة B مفتوحة في A إذا وفقط إذا كانت مفتوحة في X

⇐ لزوم الشرط: نفرض B مجموعة مفتوحة في A عندئذٍ توجد مجموعة مفتوحة u في X بحيث $A \cap u = B$ وبما أن A, u مجموعتان مفتوحتان في X فإن $A \cap u$ مجموعة مفتوحة في X ومنه B مجموعة مفتوحة في X .

⇐ كفاية الشرط: نفرض أن B مجموعة مفتوحة في X عندئذٍ $A \cap B$ مجموعة مفتوحة في A كون A, B مفتوحتان في X ولكن $B = A \cap B$ ⇐ B مجموعة مفتوحة في A .

13 - (X, τ) فضاء ط و $B \subseteq A \subseteq X$ وكان $B'_x = B'_x \cap A$ فإن: $\bar{B}_A = \bar{B}_x \cap A$

نعلم أنه من أجل أي مجموعة من فضاء طبولوجي تحقق العلاقة التالية:

$\bar{B} = B' \cup B$

$\Rightarrow \bar{B}_A = B'_A \cup B_A$

$\Rightarrow \bar{B}_A = (B'_x \cap A) \cup B = (B'_x \cup B) \cap (A \cup B) = \bar{B}_x \cap A$

14 - (X, τ) فضاء ط ⇐ $B^{\circ}_x \cap A \subseteq B^{\circ}_A$ محققة

المجموعة B°_x مفتوحة في X وبالتالي $B^{\circ}_x \cap A$ مفتوحة في A وهي محتواة في B إذاً هي محتواة في B°_A وباعتبارها أكبر مجموعة مفتوحة محتواة في B فإن

$B^{\circ}_x \cap A \subseteq B^{\circ}_A$

[17] - حل تمرين (16):

لدينا X هو T_1 - فضاء، و x, y نقطتين مختلفتين من X حيث يوجد جوار U لـ x لا يحوي y ، وبالتالي النقطة y أي أن:

$x \in \overline{\{x\}}$, $y \notin \overline{\{x\}}$ إذ $\overline{\{x\}} \neq \overline{\{y\}}$

[18] - X فضاء طوبولوجي و $\overline{\{x\}} \neq \overline{\{y\}}$ من أجل أي نقطتين مختلفتين x, y من X فإن X هو T_0 - فضاء.

نفرض $\overline{\{x\}} \neq \overline{\{y\}}$ ونفرض جدلاً أن X ليس T_0 - فضاء عندئذ أي جوار لـ x يحوي y وأي جوار لـ y يحوي x أي أن:

$\overline{\{y\}} \subseteq \overline{\{x\}}$ و $\overline{\{x\}} \subseteq \overline{\{y\}}$

وبالتالي $\overline{\{x\}} = \overline{\{y\}}$ وهذا تناقض ومنه X هو T_0 - فضاء.

[19] - إذا كان X عبارة عن T_1 - فضاء فالمجموعة وحيدة العنصر $\{x\}$ تكون مغلقة مهما كانت x.

نأخذ نقطة كيفية حسب الفرض $y \in X \setminus \{x\}$, $x \neq y$

حسب الفرض يوجد جوار U للنقطة y لا يحوي x

أي أن $U \subseteq X \setminus \{x\}$ هذا يعني أن y نقطة داخلية في المجموعة $X \setminus \{x\}$ وبما أن y كيفية

فجميع نقاط المجموعة داخلية فالمجموعة مفتوحة أي أن $\{x\}$ مغلقة.

[20] - إذا كان X فضاء طوبولوجي وكانت المجموعة وحيدة العنصر $\{x\}$ مغلقة مهما كانت x فإن X هو T_1 - فضاء.

لنأخذ نقطتين x, y ، حسب الفرض يكون $X \setminus \{x\}$ مفتوحة وتحوي y إذاً هي جوار لـ y لا يحوي x، وبالمثل المجموعة $\{y\}$ مغلقة فتكون $X \setminus \{y\}$ مفتوحة وتحوي x إذاً هي جوار لـ x لا يحوي y حيث X هو T_1 - فضاء.

[21] - ليكن $f, g : X \to Y$ تطبيقين مستمرين من الفضاء X إلى فضاء هاوسدورف Y عندئذ تكون المجموعة $A = \{x \in X ; f(x) = g(x)\}$ مغلقة في X.

ليكن لدينا التطبيق $\lambda : X \to Y' = Y \times Y$

حيث $\lambda : x \mapsto (f(x), g(x))$

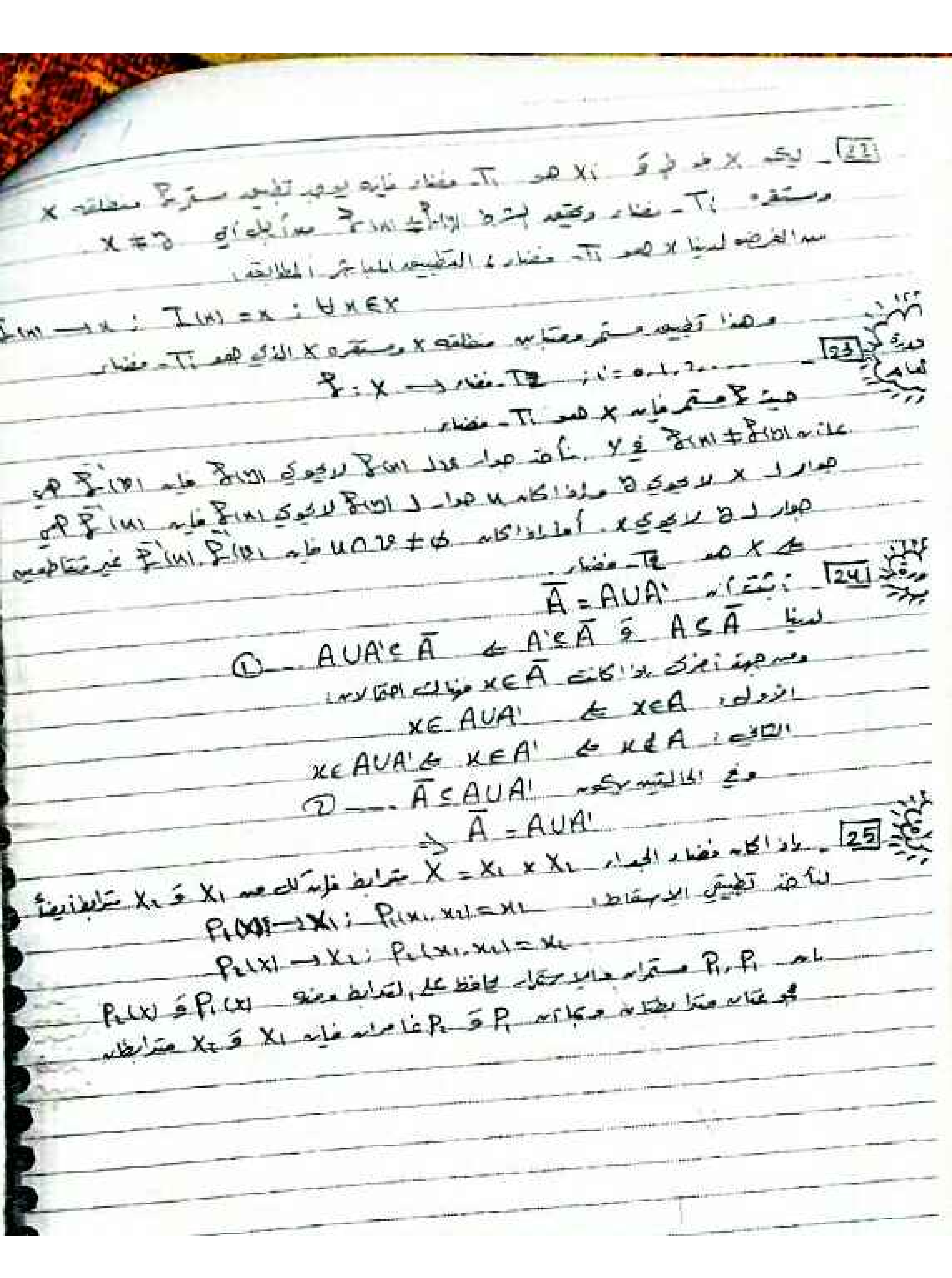
$P_1 \circ \lambda = f$ ، $P_2 \circ \lambda = g$

ولدينا f, g مستمرين إذاً λ مستمر.

وبما أن Y فضاء هاوسدورف فتكون المجموعة $\Delta = \{(y,y) : y \in Y\}$ مغلقة في Y'

لكن لدينا Δ مغلقة و λ مستمرة وبالتالي $\lambda^{-1}(\Delta)$ مغلقة في X ولكن الصورة العكسية

لـ Δ هي $\lambda^{-1}(\Delta) = A$ ومنه A مغلقة في X.



22 - ليكن X فضاء توبولوجي (X) هو T_i - فضاء فإنه يوجد تطبيق مستمر f منطلقه X ومستقره T_i - فضاء وحقيقة لشرط الإزالة $f(x)$ ... $X \neq \emptyset$

من الغرض لنأخذ X هو T_i - فضاء ، التطبيق المباشر المطابقة

$I : X \to X ; \; I(x) = x ; \; \forall x \in X$

وهذا تطبيق مستمر ومتقابل منطلقه X ومستقره X الذي هو T_i - فضاء

23 - $i = 0, 1, 2$; $f : X \to T_2$ - فضاء

حيث f مستمر فإن X هو T_i - فضاء

علماً $f(x) \neq f(y)$ في T_2 ... جوار لـ x لا يحوي y فإن $f^{-1}(u)$ هي جوار لـ x لا يحوي y ... وإذا كان v جوار لـ $f(y)$ لا يحوي $f(x)$ فإن $f^{-1}(v)$ هي جوار لـ y لا يحوي x. أما إذا كان $u \cap v \neq \emptyset$ فإن $f^{-1}(u)$, $f^{-1}(v)$ غير متقاطعين

X هو T_2 - فضاء

24 - نثبت أن : $\bar{A} = A \cup A'$

لدينا $A \subseteq \bar{A}$ و $A' \subseteq \bar{A}$ ⇐ $A \cup A' \subseteq \bar{A}$ ... ①

ومن جهة أخرى إذا كانت $x \in \bar{A}$ فهناك احتمالان

الأول : $x \in A$ ⇐ $x \in A \cup A'$

الثاني : $x \notin A$ ⇐ $x \in A'$ ⇐ $x \in A \cup A'$

وفي الحالتين يكون $\bar{A} \subseteq A \cup A'$ ... ②

⇐ $\bar{A} = A \cup A'$

25 - إذا كان فضاء الجداء $X = X_1 \times X_2$ مترابط فإنه كل من X_1 و X_2 مترابطين

لنأخذ تطبيقي الإسقاط

$P_1 : X \to X_1 ; \; P_1(x_1, x_2) = x_1$

$P_2 : X \to X_2 ; \; P_2(x_1, x_2) = x_2$

لدينا P_1, P_2 مستمران وبما أن التطبيق المستمر يحافظ على الترابط ومنه $P_1(X)$ و $P_2(X)$ مترابطان وبما أن P_1 و P_2 غامران فإن X_1 و X_2 مترابطين

26 - اجتماع مجموعتين متراصتين هو مجموعة متراصة.

لتكن A, B مجموعتين متراصتين في (X, τ).

لنأخذ تغطية مفتوحة $\mathcal{U}$ للاجتماع $A \cup B$.

إذن $\mathcal{U}$ تغطية لـ A ولكن A متراصة ومنه فإن $\mathcal{U}$ تحتوي على تغطية جزئية منتهية $\mathcal{U}_1$ لـ A

وبالمثل $\mathcal{U}$ تغطية لـ B وبالتالي يوجد $\mathcal{U}_2$ لـ B

إذن $\mathcal{U}_1 \cup \mathcal{U}_2$ تغطية جزئية منتهية لـ $A \cup B$.

$A \cup B$ متراصة

27 - تقاطع عدد منته من جوارات نقطة x هو جوار لـ x.

$\bigcap V_i \in N(x)$ ؟؟ $V_1, V_2, \dots, V_n \in N(x)$

$\exists U_i \in \tau : \forall i = 1, 2, \dots, n$ ، $x \in U_i \subseteq V_i$

$x \in \bigcap U_i \subseteq \bigcap V_i$

ومنه تقاطع عدد منته من الجوارات المفتوحة هو مجموعة مفتوحة فإن $x \in \tau$.

28 - كل فضاء طبولوجي منته يكون متراص.

(X, τ) فضاء و X منتهية،

$X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$

وإذا كانت $G = \{G_i : i \in N\}$ تغطية مفتوحة لـ X فإنه لكل $x_j \in X$

توجد مجموعة G_{i_j} بحيث $x_j \in G_{i_j}$ ومنه $X \subset (G_{i_1} \cup G_{i_2} \cup \dots \cup G_{i_n})$

أي أن

$G^* = \{G_{i_j}\}_{j=1}^{n}$

تشكل تغطية جزئية منتهية لـ X فهو متراص.

{ الفصل الأول للعام الدراسي 2015 / 2016 : }

السؤال الأول: 1) عرف الآتي: 1) T2 - فضاء. 2) الهوميومورفيزم.

1) نقول عن فضاء طبولوجي إنه T2 - فضاء إذا كان من أجل أي نقطتين مختلفتين منه يوجد لكل منها جوار لا يحوي النقطة الأخرى.

2) نقول عن التطبيق $f: X \to Y$ بأنه هوميومورفيزم إذا حقق الشروط:

1 - f تقابل. 2 - f مستمر. 3 - f^{-1} مستمر.

ب) أعط ثلاث تعاريف متكافئة للفضاء الطبولوجي المترابط.

الفضاء المترابط:

* لا يساوي اجتماع مجموعتين مفتوحتين غير خاليتين وغير متقاطعتين.
* لا يساوي اجتماع مجموعتين مغلقتين غير خاليتين وغير متقاطعتين.
* المجموعات الوحيدة المفتوحة والمغلقة في آن واحد هي المجموعة الكلية والمجموعة الخالية.

السؤال الثاني: ليكن X مجموعة غير منتهية ، و τ التبولوجي المتقطع (المتقطع) على X.

١- أثبت أن الفضاء المتقطع (X,τ):

أ- غير متراص - ب- غير مترابط ٢- معدود أول.

٣- عين قاعدة لهذا الفضاء.

٤- علل الآتي: كل تطبيق مستمر منطلقه الفضاء المتقطع (X,τ) هو تطبيق مستمر.

٥- بفرض A مجموعة جزئية فعلية من X ، $A \neq X$ ، $A \neq \phi$ أوجد:

$A^{\circ}, \bar{A}, A', Fr(A), Ext(A)$

١- الفضاء المتقطع غير متراص لأن أسرة المجموعات وحيدة العنصر $\{\{x\}\}$ تشكل تغطية مفتوحة لا تحوي تغطية جزئية منتهية لكون X مجموعة غير منتهية.

- الفضاء المتقطع غير مترابط لأن أي مجموعة جزئية فعلية منه تكون مفتوحة ومغلقة في آن معاً.

- الفضاء المتقطع معدود أول لأن $\{\{x\}\}$ تشكل جوارات أساسية منتهية (قابلة للعد) لأي نقطة من نقاطه.

٣- أسرة المجموعات وحيدة العنصر $\{\{x\}\}$ تشكل قاعدة للفضاء.

٤- لأن الصورة العكسية لأي مجموعة مفتوحة في المستقر تكون مفتوحة في المنطلق (لأن جميع المجموعات في الفضاء المتقطع مفتوحة).

٥- $A^{\circ}=A$ ، $\bar{A}=A$ ، $A'=\phi$

$Ext(A)=X\setminus\bar{A}$ ، $Fr(A)=\bar{A}\setminus A^{\circ}$

$= A\setminus A=\phi$

السؤال الثالث: ليكن $f: X \to Y$ تطبيق من الفضاء التبولوجي X إلى الفضاء التبولوجي Y و A مجموعة جزئية من X و x_0 من X. إذا كانت x_0 نقطة لاصقة بالمجموعة A و f مستمر في النقطة x_0 فإن النقطة $f(x_0)$ تكون لاصقة بالمجموعة $f(A)$.

ليكن W جوار كيفي للنقطة $f(x_0)$ في Y ، إن الصورة العكسية $f^{-1}(W)$ تكون جوار للنقطة x_0 بسبب الاستمرار، وبما أن x_0 نقطة لاصقة بـ A فإن $f^{-1}(W)\cap A \neq \phi$ أي توجد نقطة x تنتمي إلى هذا التقاطع عندئذ

$f(x) \in f(f^{-1}(W)\cap A) \subseteq f(f^{-1}(W)) \cap f(A) \subseteq W \cap f(A)$

أي أن أي جوار للنقطة $f(x_0)$ يتقاطع مع $f(A)$ ما يعني أن النقطة $f(x_0)$ لاصقة بالمجموعة $f(A)$.

السؤال الرابع: أ- أثبت أن اجتماع مجموعتين متراصتين في فضاء تبولوجي هو مجموعة متراصة.

ب- ليكن A فضاء جزئي من الفضاء التبولوجي X حيث A مجموعة مفتوحة، بفرض B مجموعة جزئية من A أي $B \subseteq A$ أثبت أن B تكون مفتوحة في الفضاء الجزئي A إذا وفقط إذا كانت مفتوحة في الفضاء الكلي X.

١- ليكن A, B مجموعتين متراصتين في ف ط X لنأخذ تغطية مفتوحة U للاجتماع $A\cup B$ ، إن U تغطية لـ A وبما أن A متراصة فإن هذه التغطية تحتوي على تغطية جزئية منتهية U_1 ، وكذلك U تغطي لـ B وبالتالي توجد تغطية جزئية منتهية U_2 لـ B ، إن $U_1\cup U_2$ تغطية جزئية منتهية لـ $A\cup B$ ما يعني أن هذا الاجتماع متراص حسب التعريف.

السؤال الرابع: ب/ أ ـ البرهان B مفتوحة في الفضاء الجزئي A تعني وجود مجموعة مفتوحة U في الفضاء الكلي X بحيث $U \cap A = B$ حيث U مفتوحة في X.

و A مفتوحة في X فإن تقاطعهما الذي يساوي B هو مجموعة مفتوحة في X.

لنفرض الآن أن B مفتوحة في X، عندها: $B \cap A$ مفتوحة في الفضاء الجزئي A ولكن $B \cap A = B$ إذن B مفتوحة في A.

في الدورة الإضافية 2015/2016م

لتكن $X = \{a,b,c,d\}$ ومع طوبولوجيا على X مؤلفة من المجموعات التي تحوي العنصر a بالإضافة إلى المجموعة الخالية.

[1] ـ هل يكون الفضاء (X,τ) متراص ولماذا؟

الفضاء متراص لأن عدد مجموعاته المفتوحة منتهٍ.

٢ـ هل (X,τ) هو فضاء هاوسدورف ولماذا؟

ليس فضاء هاوسدورف لأن أي جوارين مختلفين ومنه فإن المجموعتين تتقاطعان حتماً بالعنصر a على الأقل.

٣ـ عين جوارات النقطة c:

$N(c)$: $\{a,c\}, \{a,b,c\}, \{a,c,d\}$

[2] ـ بفرض $A = \{b,c,d\}$:

١ـ أوجد $A°, \bar{A}, A', Fr(A), Ext(A)$.

$A° = \phi, \quad \bar{A} = A, \quad A' = \phi$

$Fr(A) = \bar{A} \setminus A° = A \ , \ Ext(A) = X \setminus \bar{A} = \{a\}$

٢ـ عين الطوبولوجيا النسبية τ_A (أثر الطوبولوجيا τ على A).

الطوبولوجيا النسبية τ_A : $\tau_A = \{U \cap A ; U \in \tau\}$

السؤال الثاني: علل الآتي:

١ـ الفضاء الطوبولوجي الحقيقي R يحقق موضوعة العد الأولى.

الفضاء R مع عد أول لأن النقطة x من R تمتلك جملة جوارات أساسية قابلة للعد مثل الجوارات المفتوحة $\{]x-\frac{1}{n}, x+\frac{1}{n}[\}$

٢ـ الفضاء الطوبولوجي الحقيقي R يحقق موضوعة العد الثانية.

الفضاء R مع عد ثانٍ لأنه يمتلك قاعدة قابلة للعد هي أسرة جميع المجالات المفتوحة التي أطرافها أعداد عادية.

٣ـ إذا كان $f: X \to Y$ تطبيق من فضاء X إلى فضاء Y فإن f يكون مستمر ومغلق إذا وفقط إذا تحقق العلاقة:

$f(\bar{A}) = \overline{f(A)}$

من أجل أي مجموعة A من X.

يكون التطبيق f مستمر إذا وفقط إذا كان $f(\bar{A}) \subseteq \overline{f(A)}$ (حسب مبرهنة)

ويكون مغلق إذا وفقط إذا كان $\overline{f(A)} \subseteq f(\bar{A})$.

وبالتالي يكون مستمراً ومغلقاً إذا حقق المتراجحتين معاً أي إذا تحقق المساواة.

السؤال الثالث:

١ـ أثبت صحة العلاقة $\bar{A} = A \cup A'$ من أجل أي مجموعة جزئية A من فضاء طوبولوجي X.

لدينا $A \subseteq \bar{A}$ و $A' \subseteq \bar{A}$

ومنه $A \cup A' \subseteq \bar{A}$

ومن جهة ثانية، إذا كانت $x \in \bar{A}$

منها لدينا احتمالان:

الفصل الأول $2016/2017$م

السؤال الأول: لتكن $\mathbb{R}$ مجموعة الأعداد الحقيقية مع التوبولوجيا المتممية (غير المتقطعة) على $\mathbb{R}$

أ- علل الآتي: إن الفضاء $(\mathbb{R},\tau)$ هو:

1- متراص - 2- مترابط - 3- ليس T_2 - هاوسدورف

1- الفضاء متراص لأن عدد مجموعاته المفتوحة منتهٍ.

2- الفضاء مترابط لأن المجموعتين الوحيدتين المفتوحتين والمغلقتين معاً هما ϕ و $\mathbb{R}$.

3- الفضاء ليس T_2 فضاء لأن أي نقطتين مختلفتين جوار وحيد هو الفضاء كله $\mathbb{R}$، وبالتالي لا يوجد لنقطة من نقطتين جوار لا يحوي النقطة الأخرى.

ب- بفرض $A=[0,1]$ أوجد $A^{\circ}, \bar{A}, A'$، $Fr(A), Ext(A)$

$A^{\circ}=\phi, \bar{A}=\mathbb{R}, A'=\mathbb{R}$

$Ext(A)=\mathbb{R}\setminus\bar{A}=\phi, Fr(A)=\bar{A}\setminus A^{\circ}=\mathbb{R}$

ج- عين التوبولوجيا النسبية τ_A (أثر التوبولوجيا τ على A).

التوبولوجيا النسبية $\tau_A=\{U\cap A, U\in\tau\}$
$=\{\phi, A\}$

السؤال الثاني:

أ- عرف ما يلي: 1) مجموعة العداد

2- فضاء هاوسدورف - 3) الفضاء المترابط

السؤال الثالث:

أ- الأول: $x\in A$ عندها $x\in A\cup A'$

الثاني: $x\notin A$ عندها $x\in A'$ وبالتالي $x\in A\cup A'$ وفي كلا الحالتين يكون:

$\bar{A}\subseteq A\cup A'$

ومن المتراجحتين تنتج المساواة المطلوبة.

ب- أثبت أن المجموعة الجزئية A من فضاء X تكون كثيفة إذا وفقط إذا كانت تتقاطع مع جميع المجموعات المفتوحة غير الخالية في هذا الفضاء.

مكتوب بالدفتر

ج- إذا كان فضاء الجداء $X=X_1\times X_2$ مترابطاً فأثبت أن كلاً من الفضاءين الإحداثيين X_1 و X_2 يكون مترابط.

لنأخذ تطبيقي الإسقاط:

$P_1(x)\to X_1$

$P_1(x_1,x_2)=x_1$

$P_2(x)=X_2$

$P_2(x_1,x_2)=x_2$

إن P_1, P_2 مستمران ولاسيما يحافظان على الترابط فإذن $P_1(x)$، $P_2(x)$ هما فضاءان مترابطان ومنه P_1 غامر وكذلك P_2 ينتج أن

$P_1(x)=X_1$ ، $P_2(x)=X_2$

فضاءان مترابطان

السؤال الثاني:

أ) ١- موضوعة العد الأولى: هي أن تمتلك كل نقطة من نقاط فضاء طوبولوجي عائلة أساسية من الجوارات قابلة للعد.

~~٢- فضاء [illegible] هي [illegible] التي تفصل [illegible] من الفضاء [illegible] الشروط [illegible] الجوارات [illegible]~~

٣- الفضاء المترابط هو الذي لا يساوي اتحاد مجموعتين مفتوحتين غير خاليتين وغير متقاطعتين.

ب) أكمل العبارات الآتية بما هو مناسب:

١- المجموعات المتراصة في الفضاء الإقليدي هي المغلقة والمحدودة.

٢- اتحاد عدد منته من المجموعات المتراصة هو مجموعة متراصة.

٣- اتحاد مجموعتين مترابطتين ليس بالضرورة مجموعة مترابطة.

٤- التطبيق المستمر من فضاء متراص إلى فضاء هاوسدورف هو تطبيق مغلق.

٥- يتطابق التطبيقان المستمران f و g على الفضاء X إذا تساويا على مجموعة كثيفة من X.

السؤال الثالث:

[أ] - إذا كانت المجموعة ذات العنصر الواحد $\{x\}$ مغلقة في فضاء X من أجل أي نقطة x فماذا نسمي هذا الفضاء؟ يكون T_1 فضاء.

[ب] لنأخذ نقطتين مختلفتين $y \neq x$ من الفضاء X عندها تكون المجموعة $X \setminus \{x\}$ مفتوحة وهي جوار لـ y لا يحوي x، كما أن $X \setminus \{y\}$ مجموعة مفتوحة وهي جوار لـ x لا يحوي y وبالتالي X هو T_1 فضاء.

[ج] لتكن B قاعدة للفضاء الطوبولوجي X. أثبت أن أسرة المجموعات $V=\{V \in B : x \in V\}$ هي عائلة أساسية في الجوارات للنقطة x مهما كانت x من X.
لتكن x نقطة كيفية من الفضاء و G جوار كيفي لـ x عندئذ توجد مجموعة مفتوحة U بحيث $x \in U \subseteq G$
وعبارات (مكتوبة بالأول)...

[د] أثبت أن المجموعة الجزئية A من فضاء X تكون كثيفة إذا وفقط إذا كانت تتقاطع مع جميع المجموعات المفتوحة غير الخالية.

تعاريف:

١- فضاء القسمة: هو مجموعة القسمة مع طوبولوجيا القسمة $(X/P, \tau/P)$.

٢- موضوعة العد الأولى:
هي أن تمتلك كل نقطة من نقاط فضاء طوبولوجي عائلة أساسية من الجوارات قابلة للعد.
مثال: (X,τ) فضاء طوبولوجي متقطع.
أي فضاء متري هو فضاء عد أول

موضوعة العد الثانية:
هي أن يمتلك الفضاء الطوبولوجي قاعدة قابلة للعد
كل مسلمة ثانية هو عد أول والعكس غير صحيح

الفضاء القابل للفصل (المنفصل):
هو الفضاء الطوبولوجي الذي يحوي مجموعة كثيفة قابلة للعد
مثال: R منفصل لأنه يحوي مجموعة كثيفة قابلة للعد هي Q

- مسلمة الفصل الصفرية (T_0):

هي أنه من أجل أي نقطتين مختلفتين من فضاء طوبولوجي يوجد لإحداهما جوار لا يحوي الأخرى.

- مسلمة الفصل الأولى (T_1):

هي أنه من أجل أي نقطتين مختلفتين من ف.ط يوجد لكل منهما جوار لا يحوي النقطة الأخرى.

* كل T_1 فضاء هو T_0 فضاء والعكس غير صحيح.

- مسلمة الفصل الثانية (T_2):

هي أنه من أجل أي نقطتين مختلفتين من فضاء طوبولوجي يوجد جوار للنقطة الأولى وجوار للثانية وهذان الجواران لا يتقاطعان.

* كل T_2 فضاء هو T_1 فضاء والعكس غير صحيح.

- فضاء هاوسدورف:

الشرط اللازم والكافي حتى يكون الفضاء الطوبولوجي X فضاء هاوسدورف هو أن تكون المجموعة:

$$\Delta = \{(x,x) : x \in X\}$$

$$X^2 = X \times X$$

مغلقة في فضاء الجداء.

- الفضاء المتراص: نسمي الفضاء X فضاء متراص إذا كانت أي تغطية مفتوحة له تحتوي على تغطية جزئية منتهية.

مثال: R فضاء غير متراص؟ (علل)

لأن جماعة المجالات المفتوحة من الشكل $]-n,n[$ تشكل تغطية مفتوحة للفضاء ولكنها لا تحتوي على تغطية جزئية منتهية.

- الفضاء المتقطع X غير متراص؟

لأن جماعة المجموعات وحيدة العنصر $\{x\}$ تشكل تغطية له ولكنها لا تحتوي على أي تغطية منتهية.

تعريف:

نقول عن مجموعة A من X أنها متراصة إذا كان الفضاء الجزئي A متراص.

- ملاحظة: أي مجموعة منتهية في فضاء طوبولوجي هي مجموعة متراصة.

- التطبيق المستمر يحافظ على التراص.

- الفضاء المترابط:

نقول عن ف.ط X أنه مترابط إذا كان لا يساوي اجتماع مجموعتين غير خاليتين وغير متقاطعتين ومفتوحتين أي إذا لم يوجد مجموعتان مفتوحتان A, B:

$$A \neq \phi ,\ B \neq \phi ,\ A \cap B = \phi$$

$$A \cup B = X$$

- القاعدة الجزئية للطوبولوجيا:

ليكن (X,τ) فضاء طوبولوجي و β جزء من المجموعات المفتوحة أي $(\beta \subseteq \tau)$ نسمي β قاعدة جزئية للطوبولوجيا τ إذا كانت أسرة التقاطعات المنتهية لعناصر β تشكل قاعدة للطوبولوجيا τ.

- النقطة الداخلية:

x نقطة داخلية في A إذا وجدت مجموعة مفتوحة U بحيث $x \in U \subseteq A$

أي تكون x داخلية في A إذا كانت A جواراً لها.

- x نقطة تراكم في A، إذا كان كل جوار للنقطة x يتقاطع مع A بنقاط تختلف عن x

$\forall v \in N(x) : v \cap A \setminus \{x\} \neq \phi$

- x لاصقة في A، إذا كان كل جوار للنقطة x يتقاطع مع A

$\forall v \in N(x) : v \cap A \neq \phi$

$A' \subseteq \bar{A}$, $A \subseteq \bar{A}$

$\bar{A} = A \cup A'$

- x نقطة حدية (صدية) في A، إذا كانت x نقطة ملاصقة لـ A ومتممتها

$Fr(A) = \bar{A} \cap \overline{X \setminus A}$

$Fr(A) = \bar{A} \setminus A^\circ$

- x نقطة خارجية في A، إذا كانت داخلية في متممتها

له جوار v لـ x بحيث $x \in v \subseteq X \setminus A$

$Ext(A) = X \setminus \bar{A}$

- إذا كانت $A = A^\circ$ تكون مفتوحة.
- = = $A = \bar{A}$ = مغلقة.
- الفضاء كله $A = R$ تكون كثيفة.
- [illegible] محدودة.
- متراصة: إذا كانت محدودة.
- مترابطة إذا كانت متراصة ومحدودة
- مغلقة ومحدودة هي متراصة
- مغلقة وليست محدودة هي غير متراصة
- مغلقة [illegible] E

- بالتعريف: المجموعة الخالية والفضاء هي مجموعة مفتوحة.

- المجموعة الكثيفة: نقول عن A مجموعة من الفضاء الطوبولوجي X مجموعة كثيفة إذا كانت لصاقتها تساوي الفضاء كله $(\bar{A} = X)$.

- إذا كان X غير منتهي نظرًا على τ:

[1] τ لا تحتوي على نقاط معزولة:

τ تحويلية: $A' = A$, $\bar{A} = A$, $A^\circ = \phi$

τ جزئية: $A' = \phi$, $\bar{A} = X$, $A^\circ = X$

[2] τ تحتوي نقاط معزولة:

A تحتوي على نقاط معزولة: $A^\circ = A$, $\bar{A} = X$, $A' = X \setminus \{a\}$

A لا تحتوي نقاط معزولة: $A^\circ = \phi$, $\bar{A} = A$, $A' = \phi$

- وإذا كان X منتهي نظرًا إلى المجموعة A:

A منتهية: $A^\circ = \phi$, $\bar{A} = A$, $A' = \phi$

A غير منتهية: $\bar{A} = X$, $A' = X$

A°: $X \setminus A$ منتهية $A^\circ = A$

$X \setminus A$ غير منتهية $A^\circ = \phi$.

مسلمات العد

- موضوعة العد الأولى: هي أن يمتلك كل نقطة من نقاط الفضاء عائلة أساسية من الجوارات قابلة للعد.
- موضوعة العد الثانية: وهي أن يمتلك الفضاء التبولوجي قاعدة قابلة للعد.
- الفضاء التبولوجي المتقطع مصمود أولي، لأنه لأي نقطة x من نقاطه يمتلك عائلة أساسية من الجوارات $\{\{x\}\}$ أحادية مكونة من مجموعة واحدة وهي وحيدة العنصر.

* أي فضاء متري هو مصمود أولي، لأنه لأي نقطة x من نقاطه يمتلك عائلة أساسية قابلة للعد هي الكرات المفتوحة $\{B(x,\frac{1}{n})\}_{n\in N}$ عائلة الجوارات الغير منتهية قابلة للعد لأنها تكافئ مجموعة الأعداد الطبيعية.
* الفضاء الحقيقي هو مصمود أولي، لأنه فضاء متري، لأي نقطة من نقاطه $\{x\}$ لها عائلة جوارات أساسية قابلة للعد وهي من الشكل $\{]x-\frac{1}{n}, x+\frac{1}{n}[\}_{n\in N}$
* الفضاء الحقيقي هو مصمود ثاني لأن مجموعة المجالات المفتوحة من الشكل $]a,b[$ حيث a,b أعداد عادية تشكل قاعدة لهذا الفضاء وهي قابلة للعد مثل Q
* كل مصمود ثاني هو مصمود أولي:

لأنه استناداً على المبرهنة تكون B قاعدة للفضاء التبولوجي إذا وفقط إذا كان $V=\{V\in B: x\in B\}$ عائلة أساسية للجوارات النقطة x لكل عنصر من B إذا كانت B قابلة للعد فإن B قابلة للعد.

- مبرهنة:

كل فضاء مصمود ثاني يحوي مجموعة كثيفة قابلة للعد؟

البرهان:

بما أن الفضاء مصمود ثاني فهو يمتلك قاعدة قابلة للعد ولتكن عناصر المجموعات المفتوحة $\{V_k\}$ نختار من كل مجموعة من هذه المجموعات نقطة $x_1\in V_1$ ، $x_2\in V_2$ ، ... فنحصل على المجموعة $\{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$ وهي مجموعة قابلة للعد وهي مجموعة كثيفة لأنها تتقاطع مع جميع المجموعات المفتوحة الغير خالية.

موضوعات الفصل :

- موضوعة الفصل الصفرية: هي من أجل أي نقطتين مختلفتين من فضاء طبولوجي يوجد جوار لإحداهما لا يحوي الأخرى.

* نقول عن الفضاء X أنه T_0 فضاء إذا كان من أجل $x, y \in X$ فإن $\overline{\{x\}} \neq \overline{\{y\}}$

- موضوعة الفصل الأولى T_1 : هي من أجل أي نقطتين مختلفتين من فضاء طبولوجي يوجد لكل منهما جوار لا يحوي النقطة الأخرى.

* نقول عن الفضاء أنه T_1 فضاء إذا كان $x \in X$ فإن المجموعة $\{x\}$ مغلقة.

- موضوعة الفصل الثانية T_2 (فضاء هاوسدورف) : من أجل أي نقطتين مختلفتين من فضاء طبولوجي يوجد جوار للنقطة الأولى وجوار للثانية ويكون الجواران لا يتقاطعان.

* نقول عن الفضاء X أنه هاوسدورف إذا وفقط إذا كانت المجموعة $\Delta = \{(x,x) ; x \in X\}$ مغلقة في فضاء الجداء $X^2 = X \times X$.

التراص :

* نقول عن الفضاء X أنه متراص إذا كانت أي تغطية مفتوحة له تحتوي على تغطية جزئية منتهية.

* نقول عن الفضاء X أنه متراص إذا وفقط إذا كانت أي أسرة $\{M_\alpha\}_{\alpha \in I}$ من المجموعات المغلقة التي تقاطعها خالي أي: $\bigcap_{\alpha \in I} M_\alpha = \phi$ فإنها تحتوي على أسرة جزئية منتهية تقاطعها خالي:

$M_{\alpha_1}, M_{\alpha_2}, \ldots, M_{\alpha_n}$

* X فضاء طبولوجي و $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ أسرة من مجموعات مفتوحة، هذه الأسرة تغطية للفضاء إذا كان: $X \subseteq \bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha$

* أي فضاء يحوي عدد مجموعات منتهية يكون متراص لأن أي تغطية له تكون منتهية.

التراص :

- الفضاء $\mathbb{R}$ غير متراص لأن أسرة المجالات المفتوحة $\{]-n,n[\}$ تشكل تغطية للفضاء $\mathbb{R}$ ولكنها لا تحتوي على تغطية جزئية منتهية.
- الفضاء المتقطع (X,τ) : حيث X غير منتهية و τ الطبولوجيا القوية : غير متراص لأن أسرة المجموعات أحادية العنصر $\{\{x\}\}$ تشكل تغطية مفتوحة ولكنها لا تحتوي على تغطية جزئية منتهية.
- أي مجموعة منتهية لفضاء طبولوجي هي مجموعة متراصة لأنه لو أخذنا

$$A=\{a_1,\dots,a_n\}$$

وأخذنا تغطية كيفية مفتوحة لـ A $\{U_\alpha\}$ فإنه :

$$A\subset\bigcup_{i=1}^{n} U_{\alpha_i} \Leftarrow i=1,\dots,n \; ; \; a_i\in U_{\alpha_i}$$

- كل مجموعة متراصة في فضاء متري هي مغلقة ومحدودة.
- $\mathbb{R}^n$ تكون متراصة إذا كانت مغلقة ومحدودة.
- $\mathbb{Q}$ غير متراصة لأنها غير محدودة.
- فضاء الحذف متراص لأن جميع الفضاءات الإقصائية متراصة.
- فضاء القسمة فضاء متراص لأنه لو أخذنا التطبيق القانوني

$$\gamma : X \longrightarrow X/\mathcal{R} \; ; \; \gamma(x)=\dot{x}$$

مستمر وغامر

الترابط :

* نقول عن X أنه فضاء مترابط إذا وجد مجموعتين مفتوحتين A و B غير خاليتين وغير متقاطعتين بحيث أن :

$$A\cap B=\phi \Leftarrow B\neq\phi , A\neq\phi$$

فإنه $A\cup B\neq X$

* نقول عن X أنه فضاء مترابط إذا وجد مجموعتين مغلقتين A و B غير خاليتين وغير متقاطعتين فلا يساوي اجتماعهما X.

$$A\cup B\neq X$$



[illegible]:

لتكن X فضاء τ تبولوجيا على X

* X منتهي : ننظر على المجموعة A :

← A منتهية : $A^\circ = \phi ,\ \bar{A} = A ,\ A' = \phi$

← A غير منتهية : $A' = X ,\ \bar{A} = X ,\ A^\circ$

← X\A منتهية $A^\circ = A$

← X\A غير منتهية $A^\circ = \phi$

* X غير منتهي ، ننظر على τ :

1 ـ τ لا تحوي على نقاط منعزلة:

← τ متقطع : $A^\circ = A ,\ \bar{A} = A ,\ A' = \phi$

← τ تافه : $A^\circ = \phi ,\ \bar{A} = X ,\ A' = X$

2 ـ τ تحوي على نقاط منعزلة (ننظر على A):

← A تحوي النقاط المنعزلة (النقاط) : $A^\circ = A ,\ \bar{A} = X ,\ A' = X \setminus$ [illegible]

← A لا تحوي النقاط المنعزلة: $A^\circ = \phi ,\ \bar{A} = A ,\ A' = \phi$

ملاحظات:

- اذا كانت X تافه تحت [illegible] $X = [a, b]$ فإنها تأخذ شكل مجموعة غير منتهية.
- اذا كانت $A = Z$ ⇐ A منتهية.
- اذا كانت $A = Q$ ⇐ A غير منتهية و X\A غير منتهية.